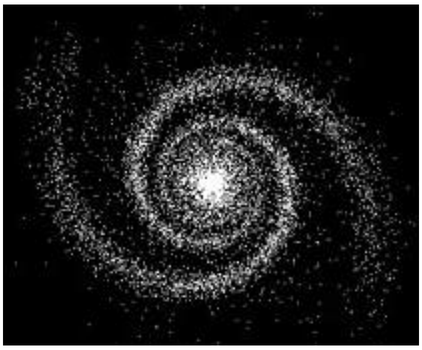
LE NOMBRE D'OR

Voici deux extraits d'écrits au sujet du nombre d'or :

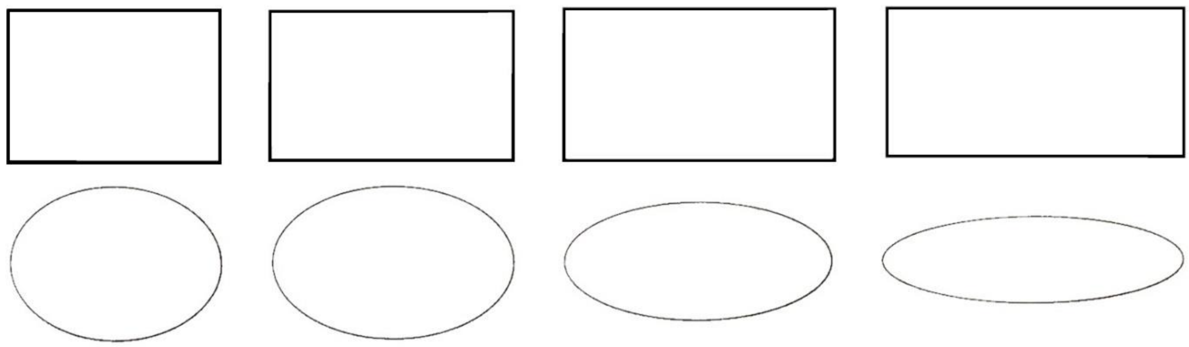
« Le nombre d'or ou divine proportion se vérifie dans des chefs d'œuvre tels que la pyramide de Chéops ou le Parthénon ; il est l'emblème de l'harmonie chez les Pythagoriciens et leurs descendants spirituels »,

« On le voit partout. A écouter ses partisans, il est la clef de voûte de l'univers. Sauf que sa dorure est en toc !».

Bien sûr l'homme s'inspire bien souvent de la nature. On peut alors se demander quel est le point commun entre une galaxie, un nautile et une fleur de tournesol.



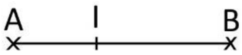
Avec un peu d'intuition, la réponse paraît évidente : le nombre d'or. Mais qu'est-ce donc que ce nombre d'or ? C'est ce que nous allons essayer de comprendre au travers de ce petit document d'étude.



① ② ③ ④

Ci-dessus figurent quelques rectangles et quelques ellipses de dimensions différentes, de plus en plus allongés, présentés pour servir de cadre pour des dessins ou des peintures. Près des trois quarts des personnes interrogées sur l'esthétique de ces cadres ont montré une préférence pour le ②. Ce qui différencie les images proposées est la valeur du rapport longueur/largeur, et ce rapport pour celles qui ont été préférées a pour valeur environ **1,62**.

Il se trouve que ce nombre fut introduit au III$^{\text{ème}}$ siècle avant J.C. par **Euclide** pour résoudre un problème à une dimension (longueur) : Il cherchait le moyen de « couper une droite en extrême et moyenne raison ».
En plus simple : existe-t-il un point I sur un segment [AB] tel que le rapport « grand/moyen » soit le même que celui « moyen/petit »
ou $\frac{AB}{IB} = \frac{IB}{IA}$



À toi de jouer

En prenant les mesures nécessaires sur les figures ci-dessus, indiquer dans quel cas le segment [AB] *a été partagé en « extrême et moyenne raison ».*

Si on pose que AI $= a$ et IB $= b$, l'égalité précédente devient : $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$,

ou encore $1 + \frac{b}{a} = \frac{a}{b}$. (1)

En posant $x = \frac{a}{b}$, l'équation (1) devient : $x = 1 + \frac{1}{x}$.

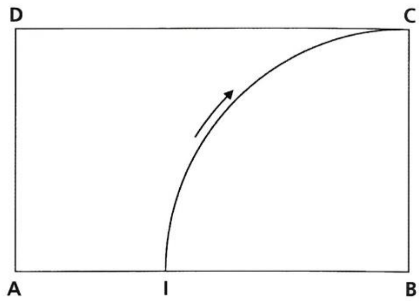
Montrer que cette équation peut s'écrire $x^2 = x + 1$.

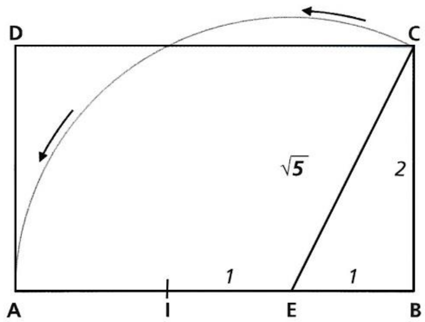
L'équation $x^2 = x + 1$ admet deux solutions (tu apprendras à les déterminer au lycée), seule la solution positive nous intéresse et c'est $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Prouver que le nombre $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ *est une solution de l'équation* $x^2 = x + 1$.

$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est appelé le nombre d'or (en 1931), il est représenté par la lettre grec φ en hommage au sculpteur grec Phidias. Donner à l'aide de la calculatrice une valeur approchée de φ.

Si on reporte la longueur du segment [BI] sur la perpendiculaire en B à [AB], on obtient un côté [BC] qui permet de construire un rectangle ABCD.
Ce rectangle dans lequel le rapport longueur/largeur vaut 1,61803… est « le rectangle d'or » et il correspond justement à celui choisi par la majorité des personnes interrogées.





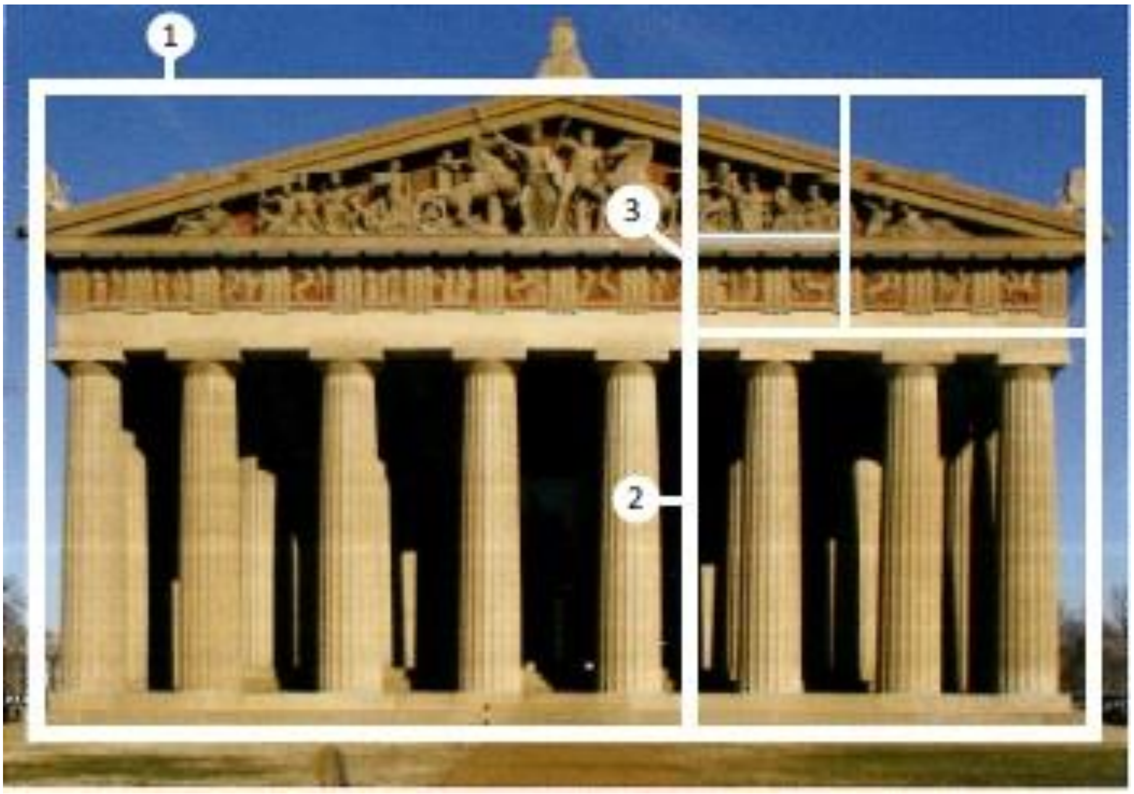
Mais pour tracer un tel rectangle d'or et trouver le point C, il faut déterminer la position du point I. On va donc déplacer le problème et placer arbitrairement un point I et déterminer la position du point A.
Dans le triangle EBC rectangle en B, d'après la propriété de Pythagore, on a :

$$EC^2 = EB^2 + BC^2$$

Si on choisit EB = 1 et BC = 2 alors EC $= \sqrt{5}$.

Donc en reportant la longueur EC sur (BE) on obtient la position du point A.

Ce rectangle d'or a été utilisé pour la construction du Parthénon à Athènes.



Le rectangle d'or principal ① englobe tout l'édifice

Le carré du second rectangle d'or ② définit la hauteur des colonnes.

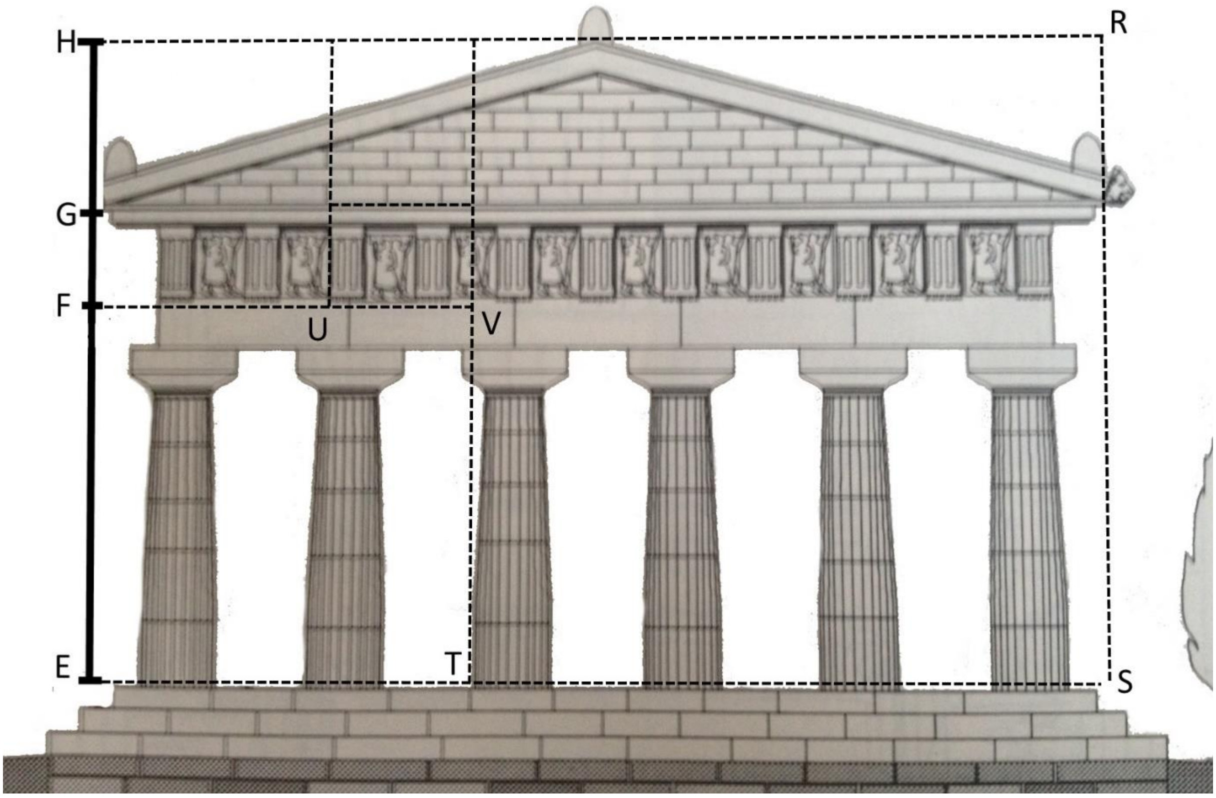
Le plus petit des rectangles d'or ③ définit la hauteur de la frise

Si vous avez été un peu attentifs vous devriez vous rendre compte que nous ne sommes pas en Grèce et que le temple qui se dresse devant vous n'est pas le Parthénon mais le temple de Poséidon.

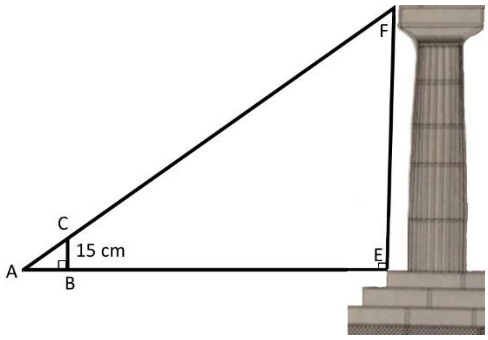
Nous sommes sur les terres italiques avec des constructions grecques. L'idée est de vérifier si cet édifice est un temple grec parfait ou si cela n'est qu'une vulgaire reproduction.

A toi de jouer

Pour cela vous allez devoir travailler avec les outils de l'époque. Un mètre étalon et un bout de bois de 15 cm. Notre bon vieil ami Thalès se rappelle à vous, à charge pour οἱ λογισταί (mathematici) *de troisième d'utiliser* τοὺς γεωμέτρας (mensores) *de quatrième pour faire les relevés qui leur serviront ensuite à faire les calculs et savoir si les différents rectangles sont eux aussi d'or.*



Les longueurs à déterminer sont EF, EH *et* FG.



Il va donc falloir utiliser la propriété de Thalès.

Votre œil est en A.

BC *représente le bout de bois de 15cm qu'il faudra positionner de telle sorte que :*

- A, B, E *soient alignés et* (AE) *parallèle au sol*
- A, C, F *soient alignés.*

Calcul de EF :

ABC et AEF sont en configuration de Thalès et les droites (BC) et (EF) sont parallèles alors d'après la propriété de Thalès, on a :

$$\frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$$

D' où EF =

Calcul du rapport largeur/hauteur : $\frac{\quad}{\quad} =$

Calcul de EH :

D'où EH =

Calcul du rapport largeur/hauteur : $\frac{\quad}{\quad} =$

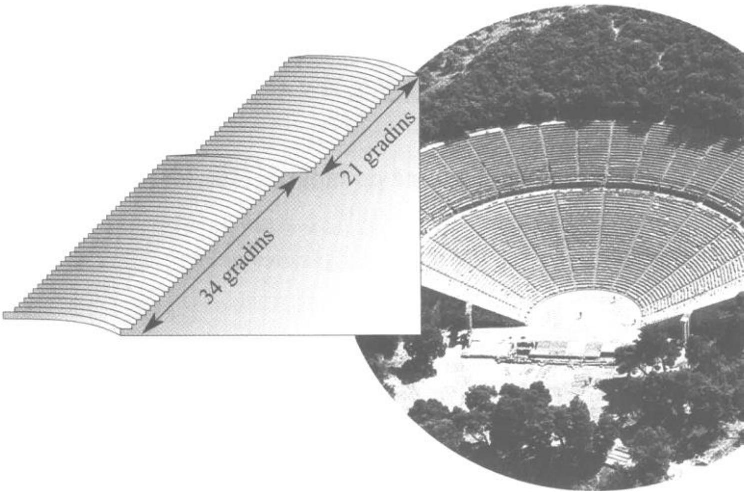
Calcul de GF :

D'où GE =

D'où GF =

Conclusion :

Un autre exemple grec : le théâtre d'Epidaure.



Construit par l'architecte Polyclète le jeune, il est l'un des plus achevés du monde antique, d'une pureté sans égale.

La scène est un cercle parfait de 20 mètres de diamètre.

Quant à la cavéa, elle fut bâtie en deux temps. La partie inférieure pouvait accueillir 6 210 spectateurs et deux siècles plus tard la capacité d'accueil passa à 12 300 spectateurs par l'ajout de 21 rangées supplémentaires.

A toi de jouer

C'est cette répartition des gradins en deux blocs, un de 34 et l'autre de 21 que nous allons étudier.

Calculer au millième les rapports $\frac{34+21}{34}$ et $\frac{34}{21}$. *Que remarque-t-on ?*

Est-il envisageable que ce soit seulement une coïncidence ?

Une réponse peut être donnée par une suite de nombres particulièrement intéressante.

Fibonacci, mathématicien italien du Moyen-Age, a découvert une suite de nombres qui porte son nom. Cette suite se construit simplement : chacun de ses termes est égal à la somme des deux précédents.

Continuer la suite de Fibonacci jusqu'au treizième terme :

1	1	2	3	5	8	13						

On calcule le quotient d'un nombre de la suite par le précédent (arrondir au dix-millième).

Exemple : $\frac{1}{1} = 1$; $\frac{2}{1} = 2$; $\frac{3}{2} = 1{,}5$; $\frac{5}{3} \approx 1{,}6667$

Continuer avec tous les nombres de la suite écrits ci-dessus. Que constate-t-on ?

$\frac{8}{5} =$	$\frac{13}{} =$	$\frac{}{} \approx$	$\frac{}{} \approx$
$\frac{}{} \approx$	$\frac{}{} \approx$	$\frac{}{} \approx$	$\frac{}{} \approx$

Revenons à la disposition des gradins du théâtre d'Epidaure, 34 gradins puis 21, deux termes consécutifs de la suite de Fibonacci dont le rapport est très proche du nombre d'or comme tu l'as découvert ci-dessus.
Ainsi, les nombres 34 et 21 ont été probablement choisis avec soin.

Quelles étaient pour l'architecte les autres possibilités pour obtenir le « même effet » ?

Avec 34 gradins, d'abord 21 suivis de 13

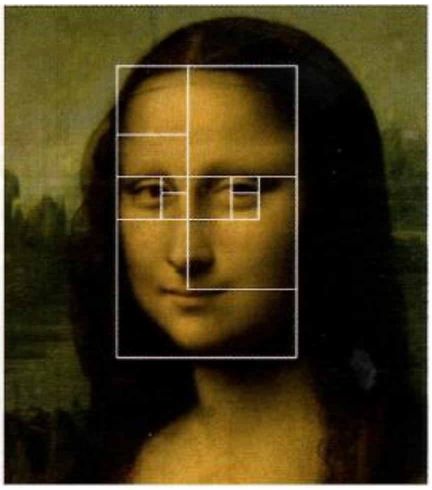
Avec 89 gradins, d'abord suivis de

Ainsi les nombres deviennent rapidement trop grands pour être utilisables.

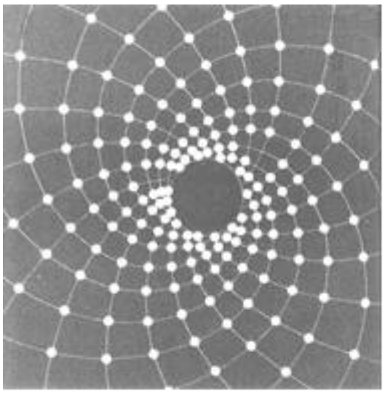
Et nos exemples de départ : tournesol, nautile, galaxie ?

Evidemment le nombre d'or n'apparaît pas seulement en architecture, mais aussi en musique où de nombreux musiciens l'ont utilisé de façon consciente dans leurs compositions : Dufay (XVème siècle), Beethoven, Debussy, Duke Ellington… Par exemple, Béla Bartok, dans son premier mouvement de la musique pour cordes, percussions et celesta, utilise le principe suivant : ce mouvement comprend 89 mesures. La mesure 55 correspondant au nombre d'or, marque le point culminant d'une progression amorcée dès le début de l'œuvre.

Mais aussi en peinture, comme dans les œuvres « Une baignade à Asnières » de Georges Seurat et « La Joconde » de Léonard de Vinci.



Le plus étonnant est de retrouver ce nombre également en biologie : le cœur de tournesol est composé de deux séries de spirales tournant en sens contraire. Le nombre de ces spirales varie selon les espèces: tantôt 13 tournant dans un sens et 21 dans l'autre sens, tantôt 21et 34, 34 et 55, 55 et 89, voire 89 et 144.

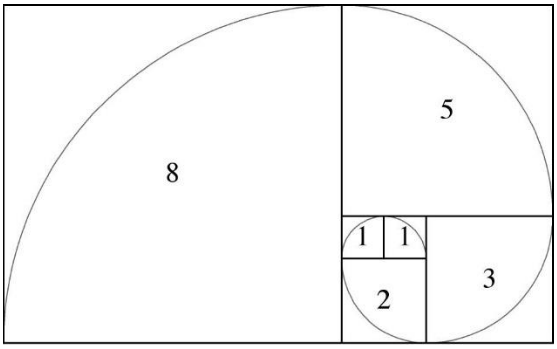


Dans le schéma ci-contre, 13 spirales tournant dans le sens des aiguilles d'une montre et 21 dans le sens contraire

Ces nombres ne sont évidemment pas le fruit du hasard ! Tu commences à bien connaître ces nombres : ce sont dans chaque cas des termes consécutifs de la suite de Fibonacci.

Lors de ta prochaine promenade en forêt, cherche une pomme de pin et tu ne la verras plus de la même façon non plus.

Sans oublier notre nautile :



Et maintenant vous trouverez tout seuls le lien entre une galaxie et le nombre d’or